Taller olimpiadas: Combinatoria

10 de noviembre

En esta sesión resolveremos problemas de combinatorias con los que aprenderemos distintas ideas que se pueden usar para resolverlos. Como no, nuestro amigo el principio del Palomar puede que nos sea muy útil. En caso de que alguien no se acuerde, estará enunciado en esta hoja:

Lemma 1. *(Principio del palomar) Si hay más palomas que palomares, alguno de los palomares deberá contener por lo menos dos palomas.*

Upss, Somos matemáticos!!! Ese enunciado no es formal!!! Bueno, si estáis interesados:

Lemma 2. *(Principio del palomar versión formal) Si A y B son conjuntos finitos con $\mid A \mid > \mid B \mid$ entonces no existe ninguna función inyectiva de A en B*

1. Problemas

Problema 1. Dadas 7 lineas en el plano, probar que existen dos de ellas que forman un ángulo menor que $26°$

Problema 2. 6 puntos en el plano están unidos todos con todos por segmentos que están pintados de rojo o de azul. Probar que existe un triángulo monocromático.

Problema 3. Determinar el número de cuaternas (x_1, x_2, x_3, x_4) de enteros positivos impares cumpliendo:

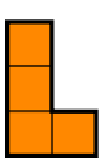
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 98$$

Problema 4. Un circulo de radio unidad contiene 7 puntos de forma que dos puntos siempre distan al menos una unidad de distancia. Probar que uno de los puntos es el centro.

Problema 5. Consideramos tableros 7×7, en cada uno coloreamos dos casillas de negro y el resto de blanco. Decimos que dos tableros coloreados de la forma descrita anteriormente son equivalentes si podemos obtener uno a partir del otro aplicándole una rotación en el plano del tablero. Hallar el número de tableros no equivalentes.

Problema 6. Proponemos el siguiente juego con un conjunto finito de enteros no negativos. En el primer turno elegimos un elemento a_i y sustituimos otro elemento del conjunto por un número menor que a_i. En el siguiente turno elegimos otro elemento a_j del conjunto pero esta vez el elemento que sustituimos por un número menor que a_j es el a_i elegido en el turno anterior. Y así sucesivamente. Demostrar que el juego terminará en un número finito de pasos.

Problema 7. Probar que una cuadrícula no se puede rellenar con tetrominós con forma de L (la figura del tetris) como el de abajo



Problema 8. Doscientos estudiantes participaron en un concurso de matemáticas. Tuvieron que resolver 6 problemas. Se sabe que cada problema fue resuelto correctamente por al menos 120 estudiantes. Prueba que deben haber dos participantes tales que cada problema fue resuelto por al menos uno de ellos.

Problema 9. Tenemos un monitor con 2000×2002 píxeles. Inicialmente, más de 1999×2001 píxeles están encendidos. En cada conjunto de píxeles 2×2 si tres de ellos están apagados el cuarto tambien se apaga automáticamente. Demostrar que la pantalla nunca que va a poder estar apagada totalmente.

Problema 10. En cada una de las casillas de un tablero de ajedrez 1998×2002, con la coloración habitual, colocamos un uno o un cero de tal forma que en cada columna y en cada fila el número total de casillas que tienen un uno es impar. Probar que el número total de casillas blancas que contienen un uno es par.

Problema 11. En una competicion, hay a participantes y b jueces, donde $b \geq 3$ es un entero impar. Cada juez valora cada concursante con aprobado o suspenso. Supon que k es un numero tal que para cada dos jueces, su puntuacion coincide para al menos k concursantes. Prueba que $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$

Problema 12. En una reunión hay representantes de n paises $n \geq 2$, sentados en una mesa redonda. Se sabe que cada dos representantes del mismo pais tienen a la derecha representantes de paises distintios. Encuentra el mayor número de representantes que puede haber.

Los probelmas 1,2,4 y 7 están en: http://yufeizhao.com/olympiad/comb1.pdf
Los problemas 8 y 11 están en: http://yufeizhao.com/olympiad/doublecounting_mop.pdf
El problema 12 es de la olimpiada iberoamericana de 1998
El resto de problemas se encuentran en el libro 102 Combinatorial Problems, de Titu Adreescu.
Para profundizar más, estas fuentes son interesantes y la página de Yuefei Zhao tiene más material.